LYCEE PILOTE MONASTIR **** DEVOIR DE CONTROLE N°1 ☆☆☆☆ PROFESSEUR : Mr **Kamel HASSEN**	SECTION : $2^{ème}$ année sciences EPREUVE : MATHEMATIQUES Durée : 1 heure. — Date : 17 / 10 / 2006

EXERCICE 1 (5 points)

1. a- Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquelles l'expression $A = \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ a un sens.

   b- Démontrer que pour tout x de D, on a : $A = \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

2. a- Montrer que $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ où k est un nombre entier non nul.

   b- En déduire que pour tout $n \in N^*$, on a : $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

EXERCICE 2 (4 points)

1. Comparer $1+\sqrt{5}$ et $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$
2. a- Soient a et b deux réels positifs. Montrer que $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

   b- En déduire que pour tous a, b et c réels positifs, on a : $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\,abc$

EXERCICE 3 (11 points)

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal et A, B, C les points de coordonnées respectives (-2, 3), (7, 0), (2, -5)

1. Soit D le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC) et H l'orthocentre du triangle ABC.
   - a- Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est non nul, donc il existe un nombre k tel que $\overrightarrow{AD} = k\,\overrightarrow{AC}$.

     Exprimer les coordonnées du point D en fonction de k.
   - b- Déterminer k, puis calculer les coordonnées du point D.
   - c- Utiliser, d'une part, l'alignement des points B, D, H et d'autre part, l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CH}$ pour calculer les coordonnées du point H.
2. Soit E le projeté orthogonal du point H sur la droite (BC) et F l'image du point H par la symétrie d'axe (BC). Calculer les coordonnées des points E et F.
3. On note (x, y) les coordonnées du centre I du cercle circonscrit au triangle ABC.
   - a- Exprimer AI^2, BI^2 et CI^2 en fonction de x et y.
   - b- Déterminer les coordonnées du point I.
4. Montrer que le point F est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

LYCEE PILOTE MONASTIR **** DEVOIR DE CONTROLE N°2 ☆☆☆☆ PROFESSEUR : Mr **Kamel HASSEN**	SECTION : 2ème année sciences EPREUVE : MATHEMATIQUES Durée : 1 heure. — Date : 14 / 11 / 2006

N.B : il sera donné une grande importance à la rédaction et à la présentation de la copie

EXERCICE 1

1. a- Résoudre dans IR, l'équation : $x^2 - 3x + 2 = 0$.

   b- En déduire la résolution de l'équation : $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$

2. Soit l'équation (E) : $x^2 - \sqrt{3}\,x - 2 = 0$

   a- Sans calculer le discriminant Δ, montrer que (E) admet deux racines distinctes x' et x''.

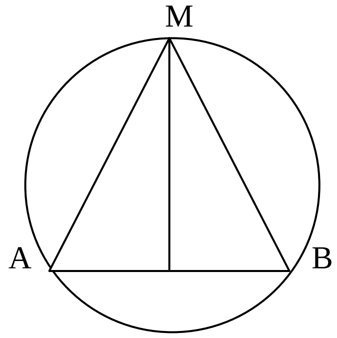
   b- Sans calculer les racines x' et x'', calculer l'expression suivante : F = $x'^2 + x'x'' + x''^2$.

EXERCICE 2

Le cercle ζ est de centre O et de rayon 1.

On trace une corde [AB] de longueur 2a ($0 < a < 1$), puis on marque le point I, milieu de [AB], et le point M, comme indiqué sur la figure (le triangle MAB est donc isocèle en M).

On pose x = MA = MB.



1. Montrer que $\left(\dfrac{x^2-2}{2}\right)^2 + a^2 = 1 \qquad (E)$
2. Pour quelle valeur de a, x = 2a est une racine de (E).
3. On prend $a = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$. Résoudre l'équation (E).

EXERCICE 3

Soit ABC un triangle du plan. Le point A' milieu du côté [BC] et M un point variable de ce plan.

1. a- Construire le point E barycentre de (A, 2) et (C, 1)

   b- Soit le point I milieu du segment [AA']. Montrer que : $2\,\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

   c- En déduire que les points B, I et E sont alignés.

2. Montrer que $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = -2\,\overrightarrow{AA'}$.
3. Montrer que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\,\overrightarrow{MG}$ où le point G centre de gravité du triangle ABC.
4. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| 2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right\|$

LYCEE PILOTE MONASTIR **** DEVOIR DE SYNTHESE N°1 ☆☆☆☆ PROFESSEUR : Mr **Kamel HASSEN**	SECTION : 2ème année sciences EPREUVE : MATHEMATIQUES Durée : 2 heures. — Date : 06 / 12 / 2006

EXERCICE 1

1. Soit P le polynôme défini par: $P(x) = x^2 - 5x + 4$.
   a- Résoudre dans IR, l'équation $P(x) = 0$
   b- Déterminer le signe de P(x).
   c- Résoudre dans IR, l'inéquation $|P(x)| < x - 1$

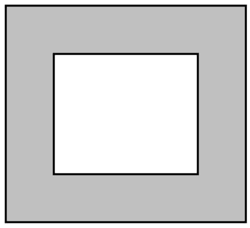
2. Soit Q le polynôme défini par : $Q(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$
   a- Factoriser $x^3 - 8$ puis déduire que $Q(x) = (x - 2)\, P(x)$.
   b- Déterminer le signe de Q(x).
   c- Résoudre dans IR, l'inéquation $\sqrt{Q(x)} \geq x - 2$

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{(x^2 - 1)(x + 2)}$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f.
2. Simplifier f(x).
3. Résoudre dans IR, l'inéquation $f(x) > 0$.

EXERCICE 3



Le grand carré est de côté 1.
Trouver la largeur x (constante) de la bande grise,
sachant qu'elle a la même aire que celle du carré intérieur.

EXERCICE 4

On considère un triangle ABC rectangle en A, I = A * C et J = A * B.

I/ 1. Construire le point E le barycentre de (A, 2) et (C, 1).
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\left\| 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \right\|$

II/ 1. Peut- on trouver un réel x tel que le point G soit le barycentre des points pondérés (A, $x^2 - 2$), (B, x-3) et (C, x-1).

2. On donne x = 2, alors G est le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, -1) et (C, 1)
   a- Montre que G est le barycentre de (E, 3) et (B, -1).
   b- Construire le point G.

3. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{GI}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
4. En déduire que AJIG est un parallélogramme.
5. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\left\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \right\|$

LYCEE PILOTE MONASTIR **** DEVOIR DE CONTROLE N°3 ☆☆☆☆ PROFESSEUR : Mr **Kamel HASSEN**	SECTION : 2ème année sciences EPREUVE : MATHEMATIQUES Durée : 1 heure. Date : 23 / 01 / 2007

EXERCICE 1

1. a- Déterminer le reste de la division euclidienne par 11 de l'entier 2041920647.

   b- Trouver les chiffres a et b pour que l'entier 51a72b soit divisible par 5 et 11.
2. a- Démontrer que la somme de deux nombres **impairs** consécutifs est divisible par 4.

   b- Montrer que si n est entier naturel **pair**, le nombre $n(n^2 + 4)$ est divisible par 8.
3. Soit x un entier naturel non nul.

   a- Montrer que x et x + 1 sont premiers entre eux.

   b- En déduire le pgcd et le ppcm de x + 1 et 2x + 1.

EXERCICE 2

A et B sont deux points distincts du plan, G le barycentre de (A, 2) et (B, 3).

Soit l'application
$$f : P \to p$$
$$M \mapsto M' \ \textit{tel que} \ \ 4\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB} \quad , \quad \alpha \in IR$$

1. Si $\alpha = -2$, Montrer que f est une translation de vecteur $\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$
2. Si $\alpha = 3$,

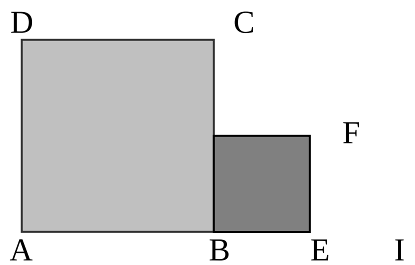
   a- Montrer que G est invariant par f.

   b- Monter que f est l'homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

EXERCICE 3

La figure ci-contre représente un carré ABCD dont les côtés mesurent 4cm et un carré BEFG dont les côtés mesurent 2cm.

Les droites (CF) et (AB) se coupent en I.



1. Déterminer le nombre k tel que $\overrightarrow{IB} = k\,\overrightarrow{IA}$
2. Soit h l'homothétie de centre I et le rapport $\frac{1}{2}$

   a- Montrer que h(C) = F et h(B) = E.

   b- Déterminer L l'image de G par l'homothétie h.

   c- Exprimer $\overrightarrow{BG}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$

   d- Déterminer l'image de D par l'homothétie h.
3. Montrer que les points I, L, G et D sont alignés.

LYCEE PILOTE MONASTIR **** DEVOIR DE CONTROLE N°4 ☆☆☆☆ PROFESSEUR : Mr **Kamel HASSEN**	SECTION : 2ème année sciences EPREUVE : MATHEMATIQUES Durée : 1 heure. — Date : 13 / 02 / 2007

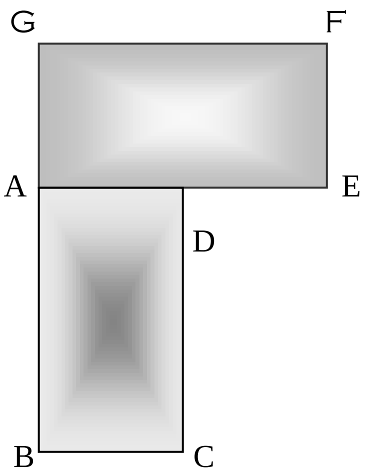
EXERCICE 1

On considère la suite (U_n) définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n^{\,2} + 2} \end{cases}$

1. Calculer U_1 et U_2 puis vérifier que (U_n) n'est pas une suite arithmétique.
2. On pose $V_n = U_n^2$
   a- Montrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison 2.
   b- Exprimer V_n en fonction de n. En déduire U_n en fonction de n.
   c- Calculer la somme $S = V_0 + V_1 + \dots\dots\dots + V_{n-1}$ en fonction de n.
   d- En déduire en fonction de n le produit : $P = 2^{V_0}\ 2^{V_1}\ 2^{V_2}\ \dots\dots\dots\ 2^{V_{n-1}}$
3. Soit (W_n) la suite définie sur IN par $W_n = 2^{V_n}$
   a- Montrer que (W_n) est une suite géométrique de premier terme $W_0 = 2$ et de raison 4.
   b- Exprimer en fonction de n la somme : $2^{V_2} + 2^{V_3} + 2^{V_4} + \dots\dots\dots + 2^{V_n}$

EXERCICE 2

La figure ci-contre représente deux rectangles ABCD et AEFG de mêmes dimensions et tels que les points D et O sont les milieux respectifs des segments [AE] et [AC].



Soit R la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. a- Déterminer R(B) et R(D).
   b- En déduire que les droites (BD) et (GE) sont perpendiculaires.
2. a- Déterminer les images par R des droites (BC) et (DC).
   b- En déduire que R(C) = F.
   c- Préciser la nature du triangle ACF.
3. Déterminer l'image de O par R.

LYCEE PILOTE MONASTIR **** DEVOIR DE SYNTHESE N°2 ☆☆☆☆ PROFESSEUR : Mr **Kamel HASSEN**	SECTION : 2ème année sciences EPREUVE : MATHEMATIQUES Durée : 2 heures. Date : 07 / 03 / 2007

EXERCICE 1

Soit la fonction f définie sur $[0,\pi]$ par $f(\alpha) = -\sqrt{2}\cos^2(\alpha) - (1+\sqrt{2})\sin(\alpha) + 1 + \sqrt{2}$

1. Calculer $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$
2. a- Montrer que $f(\pi-\alpha) = f(\alpha)$

   b- Montrer que: $f(\alpha) = \sqrt{2}\sin^2(\alpha) - (1+\sqrt{2})\sin(\alpha) + 1$

   c- Résoudre dans $[0,\pi]$; $f(\alpha) = 0$
3. Montrer que, pour tout $\alpha \in [0,\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$: $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \dfrac{tg^2\alpha - 1}{tg^2\alpha + 1} = 0$
4. Calculer (sans utiliser la calculatrice) : $\sin^2\frac{\pi}{10} + \sin^2\frac{2\pi}{5} + \sin^2\frac{9\pi}{10} + \sin^2\frac{3\pi}{5}$

EXERCICE 2

On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 0 \quad ; \quad U_1 = 1 \\ U_{n+2} = 10U_{n+1} - 9U_n \end{cases}$

1. Calculer U_2 et U_3.
2. Soit la suite $(V_n)_{n\in IN}$ définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$
   a- Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison q = 9 et de premier terme $V_0 = 1$
   b- Calculer en fonction de n la somme $S = V_0 + V_1 + \ldots\ldots + V_{n-1}$
   c- En déduire l'expression de U_n en fonction de n.
3. On pose $W_n = U_{n+1} - 9U_n$
   a- Montrer que (W_n) est une suite constante.
   b- En déduire pour tout n de IN, $U_{n+1} = 1 + 9U_n$

Voir suite au verso ☞

EXERCICE 3

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I/ On considère B(-1, 2) et C(2, 1) deux points du plan

1. Montrer que la droite (BC) a pour équation cartésienne : $x + 3y - 5 = 0$
2. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (D) perpendiculaire à (BC) passant par O.
3. Calculer la distance d(O, (BC))
4. Calculer les coordonnées du point d'intersection de (D) avec (BC).
5. Montrer que OBC est un triangle isocèle et rectangle en O.
6. Déterminer une équation cartésienne du cercle ($\mathscr{C}$) circonscrit au triangle OBC.

II/ On considère Δ_m l'ensemble des points M(x, y) vérifiant l'équation : $(m + 2)x - (m + 1)y + m - 2 = 0$ où m étant un paramètre réel.

1. Montrer que pour tout réel m , (Δ_m) est une droite.
2. Montrer que toutes les droites (Δ_m) passent par un point fixe A(3, 4) quel que soit m.
3. Déterminer la valeur du réel m pour que (Δ_m) soit globalement invariante par la translation de vecteur $\vec{j}$.

III/ On considère C_k l'ensemble des points M(x, y) tel que: $x^2 + y^2 - 4kx - 2y + 4k = 0$ où k étant un paramètre réel.

1. Montrer que, pour tout $k \in IR-\left\{\frac{1}{2}\right\}$, C_k est un cercle de centre $I_k(2k, 1)$ et de rayon $R_k = |2k - 1|$
2. Déterminer l'ensemble des centres I_k lorsque k décrit IR.
3. Montrer que tous les cercles (C_k) sont tangents entre eux en un point fixe.

LYCEE PILOTE MONASTIR **** DEVOIR DE CONTROLE N°5 ☆☆☆☆ PROFESSEUR : Mr **Kamel HASSEN**	SECTION : 2ème année sciences EPREUVE : MATHEMATIQUES Durée : 1 heure. — Date : 20 / 04 / 2007

EXERCICE 1

I / Déterminer le domaine de définition de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x}{1 - \sqrt{-x+2}}$

II / On considère la fonction f définie sur IR par f : x $\mapsto \dfrac{1}{2}x^2$

On désigne (C_f) la courbe représentative de f dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier le tableau de variation de f puis tracer (C_f).
2. Soit la fonction g définie sur IR par : g(x) = $\dfrac{1}{2}x^2$ - 2 et ($\mathscr{C}_g$) sa courbe représentative.
   a- Tracer, à partir de (C_f), la courbe ($\mathscr{C}_g$) dans le même repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
   b- En déduire le tableau de variation de la fonction g.
3. Soit (Δ) la droite d'équation : y = x - 2
   a- Tracer (Δ) sur le graphique précédent.
   b- Calculer les coordonnées des points d'intersection de (C_g) et de la droite (Δ).
   c- Résoudre graphiquement : x - g(x) $\leq$ 2.
4. Déterminer graphiquement suivant les valeurs du réel m le nombre de solutions de l'équation : g(x) = m.

EXERCICE 2

Le tableau suivant donne les quantités de lait en poudre absorbées par 100 bébés de 2 mois en une journée.

consommations (en grammes)	[40, 50[	[50, 60[	[60, 70[	[70, 80[	[80, 90 [
Effectifs	5	15	40	25	15

1. Construire l'histogramme et le polygone des effectifs de la série.
2. Calculer le mode M_o
3. Donner le tableau des fréquences cumulées croissantes.
4. Tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes.
5. Déterminer la consommation médiane : M_e
6. Calculer la moyenne arithmétique $\overline{X}$ et l'écart type σ
7. Donner le pourcentage de bébés dont la consommation de lait appartient à l'intervalle $[\overline{X} - \sigma, \overline{X} + \sigma]$.

LYCEE PILOTE MONASTIR L.P.M DEVOIR DE CONTROLE N°6 ☆☆☆☆☆ PROFESSEUR : Mr **Kamel HASSEN**	SECTION : 2ème année sciences EPREUVE : MATHEMATIQUES Durée : 1 heure. — Date : 05 / 05 / 2007

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x^2 - 2x$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

1) Vérifier que $f(x) = (x-1)^2 - 1$
2) Etudier les variations de f puis tracer sa courbe représentative (C_f).
3) a- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C_f) et la droite Δ d'équation $y = x$.
   b- Tracer dans le même repère la droite Δ.
4) Soit a un réel de l'intervalle $[0, 3]$, la droite d'équation $x = a$ coupe (C_f) en M et (Δ) en N.
   a- Exprimer MN à l'aide de a.
   b- Déterminer a pour que la distance MN soit maximale.
5) Soit la fonction g définie sur IR par $g(x) = x|x| - 2x$
   a- Montrer que g est impaire.
   b- Construire, à partir de (C_f), la courbe (C_g) dans le même repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
   c- En déduire le tableau de variation de la fonction g.

EXERCICE 2

Soient ABCD un tétraèdre, I un point de [AC] distinct de A et C et J un point de [BD] distinct de B et D.

1) a- Montrer que les droites (AC) et (BD) ne sont pas sécantes.
   b- En déduire que I et J sont distincts.
   c- Les droites (AI) et (CJ) sont-elles coplanaires ?
2) Soient K le milieu de [AB], A' le milieu de [CD] et G le centre de gravité du triangle ACD.
   a- Montrer que les droites (KG) et (BA') sont sécantes.
   b- En déduire que la droite (KG) perce le plan (BCD) en un point E que l'on construira.
3) Déterminer et construire la droite d'intersection de deux plans (KGD) et (DJA').
4) Montrer que BCED est un parallélogramme.

LYCEE PILOTE MONASTIR L.P.M DEVOIR DE SYNTHESE N°3 ☆☆☆☆☆ PROFESSEUR : Mr **Kamel HASSEN**	SECTION : $2^{ème}$ année sciences EPREUVE : MATHEMATIQUES Durée : 2 heures. Date : 30 / 05 / 2007

EXERCICE 1 (7 points)

1. Soit f la fonction définie par f(x) = $\dfrac{3}{x-2}$
   a- Etudier le sens de variation de f sur chacun des intervalles]-∞, 2[et] 2, +∞ [.
   b- Dresser le tableau de variation de f.
   c- Tracer ζ_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$
2. Soit g la fonction définie sur $IR-\{2\}$ par g(x) = $\dfrac{3x-3}{x-2}$
   a- Vérifier que pour tout $x\in IR-\{2\}$, on a g(x) = 3 + f(x).
   b- Déduire, à partir de la courbe ζ_f, le traçage de la courbe ζ_g de g dans le même repère $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$.
   c- En déduire le tableau de variation de g.
3. On considère la fonction h définie sur $IR-\{2\}$ par $h(x)=\dfrac{3x-3}{|x-2|}$
   Déduire, à partir de la courbe ζ_g, le traçage de la courbe ζ_h de h dans le même repère $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$.

EXERCICE 2 (3 points)

On considère la fonction f_m définie sur IR par: $f_m(x)=-x^2+2(m+1)x+2m$ où m est un paramètre réel.

On désigne par (C_m) la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe.
2. Donner en fonction de m les coordonnées du sommet S_m de C_m.
3. Déterminer l'ensemble des points S_m lorsque m décrit IR.

Voir suite au verso ☞

EXERCICE 3 (5 points)

Sur une portion d'autoroute, on effectue un contrôle de vitesse. Sur un échantillon de 200 automobiles, on a obtenu les résultats suivants :

Vitesse en Km. h^{-1}	] 80, 90]	] 90, 100]	] 100, 110]	] 110, 120]	] 120, 130]	] 130, 140]
Effectifs	4	18	102	50	22	4

1. La vitesse est limitée à 110 Km.h^{-1}. Quel est le pourcentage d'automobilistes en infraction ?
2. Calculer les fréquences en pourcentage de chaque classe puis les fréquences cumulées croissantes.
3. Tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes.
4. Déterminer graphiquement les valeurs approchées de la médiane M_e et les quartiles Q_1 et Q_3.
5. Construire le diagramme en boite de la série.

EXERCICE 4 (5 points)

Soient ABCDEFGH un cube, I, J, K, L et O les milieux des arêtes [EF], [EA], [BC], [DC] et [DB].

1. Montrer que le triangle IFK est rectangle en F.
2. Montrer que (JO) et (BD) sont perpendiculaires.
3. a- En utilisant Le triangle ADF.
   Montrer que (EB) et (DF) sont orthogonales.
   b- En utilisant Le triangle FDC.
   Montrer que (GB) et (DF) sont orthogonales.
   c- En déduire que la droite (DF) est perpendiculaire au plan (BEG).
4. Déterminer l'axe du cercle circonscrit au triangle EBG.